ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HÀ THU GIANG

SỐ CÂN BẰNG FIBONACCI VÀ SỐ CÂN BẰNG LUCAS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HÀ THU GIANG

SỐ CÂN BẰNG FIBONACCI VÀ SỐ CÂN BẰNG LUCAS

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách kí hiệu

B_n	số cân bằng thứ n
C_n	số Lucas-cân bằng thứ n
F_n	số Fibonacci thứ n
L_n	số Lucas thứ n
λ_1	số vô tỷ $3+\sqrt{8}$
λ_2	số vô tỷ $3-\sqrt{8}$

Mở đầu

Một số nguyên dương n được gọi là một số cân bằng với hệ số cân bằng r nếu nó là nghiệm của phương trình Diophant

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r).$$

Khái niệm về số cân bằng được đưa ra và nghiên cứu đầu tiên bởi Behera và Panda [4]. Sau đó rất nhiều tính chất đẹp của các số cân bằng được tìm ra bởi Panda [9], Ray [10, 11],... Một số tính chất này đã được trình bày lại bằng tiếng Việt trong [1].

Kí hiệu $B_n, n = 0, 1, \ldots,$ là số cân bằng thứ n, với quy ước $B_0 = 1$. Khi đó các số B_n thỏa mãn phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}.$$

Sử dụng lý thuyết của phương trình sai phân tuyến tính ta có được công thức Binet cho các số cân bằng

$$B_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, n = 0, 1, \ldots,$$

trong đó $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ và $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$. Trong chương 5 của tài liệu [10], Ray đã chứng minh một số quan hệ đặc biệt giữa các số cân bằng và các số vô tỷ λ_1 và λ_2. Mục tiêu đầu tiên của luận văn này là trình bày lại các kết quả này của Ray.

Một đặc trưng quan trọng của số cân bằng B_n là $8B_n^2 + 1$ là số chính phương. Số $C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$ được gọi là số Lucas-cân bằng thứ n. Các số Lucas-cân bằng có liên quan chặt chẽ với các số cân bằng. Cụ thể là đã có nhiều đẳng thức được tìm ra liên quan đến các số này. Đặc biệt, gần đây, Ray [11] đã chứng minh được một số đẳng thức thú vị thể hiện mối quan hệ giữa các số Lucas-cân bằng và các số cân bằng. Mục đích tiếp theo của luận văn này là trình bày lại các kết quả này của Ray.

Trong số các tính chất của các số cân bằng, có khá nhiều tính chất có tính tương đồng với tính chất của các số Fibinacci và các số Lucas. Một vấn đề tự nhiên được đặt ra: liệu có số nguyên nào vừa là số cân bằng vừa là số Fibonacci hay không? hoặc có tồn tại số cân bằng nào mà đồng thời là số Lucas hay không? Các số như vậy lần lượt được gọi là các số cân bằng Fibonacci và các số cân bằng Lucas. Các vấn đề này đã được Liptai trả lời hoàn chỉnh trong [7] và [8]. Cụ thể, trong [7], Liptai đã chỉ ra rằng chỉ có duy nhất một số cân bằng Fibonacci, đó là số 1. Bằng phương pháp chứng minh tương tự, Liptai [8] cũng chứng minh được rằng không tồn tại bất cứ số cân bằng Lucas nào. Mục đích cuối cùng của luận văn này là trình bày lại các câu trả lời này của Liptai.

Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1: Số cân bằng và một số dãy số liên quan. Phần đầu tiên của chương này chúng tôi nhắc lại về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất, nhắc lại khái niệm về số cân bằng. Tiếp theo đó, chúng tôi trình bày về khái niệm và một số tính chất của các số Lucas-cân bằng. Sau đó, chúng tôi trình bày về mối quan hệ giữa các số cân bằng với các số vô tỷ λ_1, λ_2. Cuối cùng, chúng tôi trình bày mối quan hệ giữa các số Lucas-cân bằng và các số cân bằng.

• Chương 2: Số cân bằng Fibonacci và số cân bằng Lucas. Mở đầu chương này, chúng tôi trình bày sơ lược khái niệm của các số Fibonacci và các số Lucas. Tiếp theo đó chúng tôi trình bày chứng minh của Liptai về sự tồn tại duy nhất số cân bằng Fibonacci. Cuối cùng, chúng tôi trình bày chứng minh của Liptai về sự không tồn tại số cân bằng Lucas.

Để hoàn thành luận văn này, tôi đã nhận được sự giúp đỡ rất lớn từ thầy giáo-TS Ngô Văn Định. Tôi xin gửi tới thầy lời tri ân sâu sắc nhất. Trong suốt quá trình làm luận văn, thầy đã dành nhiều thời gian, công sức để chỉ bảo và tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành đề tài. Một lần nữa xin được gửi tới thầy lời cảm ơn chân thành nhất.

Đồng thời, trong quá trình học tập và nghiên cứu, tôi đã nhận được sự giúp đỡ của các thầy cô giáo trong khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Cảm ơn các thầy cô đã tạo điều kiện trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đối với gia đình, bạn bè, đồng nghiệp-những người thân đã động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả luận văn

Hà Thu Giang

Chương 1

Số cân bằng và một số dãy số liên quan

Trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm về số cân bằng, số Lucas-cân bằng. Bên cạnh đó, chúng tôi trình bày một số tính chất thú vị về mối quan hệ giữa các số cân bằng với các giá trị λ_1, λ_2 ; và về mối quan hệ giữa các số cân bằng và các số Lucas-cân bằng. Tài liệu chính được sử dụng trong chương này là tài liệu [11] và Chương 5 của tài liệu [10].

1.1 Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Trước khi trình bày các nội dung chính của chương, chúng tôi nhắc lại khái niệm về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất và đặc biệt chúng tôi trình bày về công thức nghiệm của phương trình này trong trường hợp đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt. Đây là những kiến thức cần thiết cho các nội dung sau.

Định nghĩa 1.1.1. Phương trình có dạng

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}, n = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

trong đó A, B là các hằng số, được gọi là *phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất*.

Để tìm nghiệm của phương trình sai phân (1.1), chúng ta xét phương trình bậc hai

$$\lambda^2 - A\lambda - B = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình bậc hai này được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình sai phân (1.1). Định lý sau đây cho chúng ta công thức nghiệm của phương trình sai phân (1.1) trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt.

Định lý 1.1.2 ([6, Theorem 10.1])**.** *Giả sử phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt α và β. Khi đó phương trình sai phân (1.1) có nghiệm là*

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.3}$$

trong đó C_1 và C_2 là những số bất kì.

Chúng ta cũng cần chú ý rằng, nếu biết điều kiện ban đầu u_0 và u_1 thì các hằng số C_1 và C_2 hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 1.1.3. Tìm nghiệm của phương trình sai phân

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \tag{1.4}$$

với điều kiện ban đầu $u_0 = 4, u_1 = 7$.

Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình (1.4) là

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt là 2 và 3. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1.4) là

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n, n = 0, 1, ...$$

Từ điều kiện ban đầu $u_0 = 4, u_1 = 7$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ 2C_1 + 3C_2 = 7. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $C_1 = 5, C_2 = -1$. Vậy nghiệm của phương trình (1.4) với điều kiện ban đầu $u_0 = 4, u_1 = 7$ là

$$u_n = 5.2^n - 3^n, n = 0, 1, ...$$

□

Một cách tổng quát, phương trình sai phân (1.1) cùng với điều kiện ban đầu u_0, u_1 xác định một dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, kí hiệu bởi $u(A, B, u_0, u_1)$, với

$$u_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.5}$$

trong đó α, β là hai nghiệm của phương trình đặc trưng (1.2) và $a = u_1 - u_0\beta, b = u_1 - u_0\alpha$.

1.2 Số cân bằng

Trong mục này chúng tôi trình bày lại khái niệm về số cân bằng. Số cân bằng có rất nhiều tính chất thú vị. Các tính chất này đã được tìm ra và công bố trong các tài liệu [4], [9] và [10]. Đặc biệt một số kết quả trong các tài liệu này đã được trình bày lại bằng tiếng Việt trong luận văn thạc sĩ [1] của Hoàng Thị Hường. Ở đây chúng tôi không trình bày lại các kết quả này mà chỉ trình bày về khái niệm và một số đẳng thức cần thiết.

Định nghĩa 1.2.1. Số nguyên m được gọi là *số cân bằng* nếu

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+r)$$

với r là số tự nhiên nào đó; số r được gọi là hệ số cân bằng của m.

Ví dụ 6 và 35 là hai số cân bằng với hệ số lần lượt là 2 và 14. Khái niệm về số cân bằng được đưa ra năm 1999 bởi Behera và Panda [4]. Sau đó, rất nhiều tính chất thú vị của số cân bằng được Panda chứng minh trong [9]. Các kết quả này của Behera và Panda đã được trình bày lại trong luận văn của Hoàng Thị Hường [1].

Kí hiệu B_n là số cân bằng thứ n và đặt $B_0 = 1$. Behera và Panda [4] đã chứng minh được dãy $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ được xác định bởi phương trình sai phân

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, n = 1, 2, ..., \tag{1.6}$$

với điều kiện ban đầu $B_0 = 1, B_1 = 6$. Như vậy, ta có

$$\{B_n\}_{n=0}^{\infty} = B(6, -1, 1, 6).$$